

Tematyka egzaminu z Podstaw sterowania

Rafał Trójniak

6 września 2009

Spis treści

1 Rozwiązane tematy	1
1.1 Napisać równanie różniczkowe dla zbiornika z odpływem grawitacyjnym	1
1.2 Definicja transformaty Laplace'a	1
1.3 Co to jest transmitancja	2
1.4 Dla skalarnego liniowego równania różniczkowego n-tego rzędu napisać transmitancję	2
1.5 Co to jest impulsowa funkcja przejścia	2
1.6 Podać trzy warunki jakie muszą zajść aby można było sterować w układzie otwartym	2
1.7 Podać kształt odpowiedzi na skok i deltę Diraca dla członu	2
1.8 Po co stosuje się kryterium Hurwitza?	3
1.9 Jaki wzór opisuje kształt wyjścia w stanie ustalonym $y(t)$ dla $t \rightarrow \infty$, systemu o transmitancji $G(s)$ na sterowanie sygnałem $u(t)$.	3
1.10 Czego dotyczy stabilność w sensie Lapunowa, a czego stabilność w sensie BIBO	3
1.11 Określić stabilność obiektu G_1 i G_2 w sensie Lapunowa i w sensie BIBO	3
1.12 Napisać macierzowe równanie stanu układu liniowego	3
1.13 Napisać rozwiązanie równania stanu przyjmując $t_0 = 0$	4
1.14 Warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej dla układu liniowego dyskretnego	4
1.15 Podać kryterium sterowalności stanu dla układu liniowego	4
1.16 Podać kryterium obserwowalności stanu dla układu liniowego	4
1.17 Narysować schemat połączeń dla realizacji transmitancji $G(s)$ wykorzystując człony całkujące	5
1.18 Napisać wzór na funkcję sterowania u_k realizowanego przez dyskretny regulator PID tylko z wykorzystaniem wartości próbek u_{k-1} i próbek pomiarowych błędu e_1 (ilu?)	5
1.19 Warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej układu liniowego ciągłego	6
1.20 Podać przykłady wskaźników jakości przebiegu regulacji stosowane dla strojenia regulatorów PID	6

2	Nierozwiązane tematy	6
2.1	Jakie są główne własności regulatora typu LQR odmienne od regulatora PID	6
2.2	Po co stosuje się obserwatory stanu i jaka jest postać równania asymptotycznej estymacji stanu	6
3	Zadania z zerówki - grupa A	6
3.1	Dwa zbiorniczki równoległe z tym samym wejściem	6
3.2	2. Co to jest transmitancja	7
3.3	3. Kryterium obserwowalności układu liniowego.	7
3.4	4. Jakie własności ma regulator LQR inne niż regulator PID.	7
4	Zadania z zerówki - grupa B	7
4.1	Dwa zbiorniczki połączone szeregowo. Jakies tam dane.	7
4.2	Czym jest odpowiedź impulsowa (chyba?)	7
4.3	Kryterium sterowalności.	7
4.4	Kryterium jakości doboru parametrów dla regulatorów PID	7

1 Rozwiązane tematy

1.1 Napisać równanie różniczkowe dla zbiornika z odpływem grawitacyjnym

- Q_1 - prędkość odpływu wody przez szczelinę
- $h(t)$ - poziom cieczy w zbiorniku
- R - Stała określająca prędkość odpływu wody przez otwór (Opór)
- ρ - gęstość cieczy
- P - Pole powierzchni tafli wody (const)

$$Q_1 = \frac{h(t)}{R} \quad (1)$$

$$\dot{h}(t) = \frac{-1}{\rho P R} h(t) + \frac{1}{\rho P} Q(t) \quad P = const \quad (2)$$

$$\dot{h}(t) = \frac{-1}{\rho R} h(t) + \frac{1}{\rho} Q(t) \quad (3)$$

W stanie ustalonym :

$$\dot{h}(t) = \frac{-1}{\rho R} h(t) + \frac{1}{\rho} Q(t) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho R} h(t) = \frac{1}{\rho} Q(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h(t)}{\rho R} = \frac{Q(t)}{\rho} = 0 \quad (5)$$

1.2 Definicja transformaty Laplace'a

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \quad s = \alpha + j\omega \quad (6)$$

Dla funkcji $f(t)$ przyporządkowuje ona funkcję $F(s)$ gdzie $s = \alpha + j\omega$. Aby transformata istniała musi istnieć dla danej funkcji $f(t)$ przynajmniej jedno s , dla których taka całka istnieje, tzn. jest mniejsza od ∞ .

$$\int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau < \infty \quad (7)$$

1.3 Co to jest transmitancja

Jest to stosunek transformaty Laplace'a funkcji wyjścia systemu, do transformaty Laplace'a funkcji wejści systemu. Zakładamy zerowe wartości wejściowe.

1.4 Dla skalarnego liniowego równania różniczkowego n-tego rzędu napisać transmitancję

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (8)$$

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = U(s)b_0 u \quad (9)$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} U(s) \quad (10)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (11)$$

1.5 Co to jest impulsowa funkcja przejścia

- Jest to odpowiedź układu na deltę Diraca
- Pochodna odpowiedzi układu $h(t)$ na skok jednostkowy

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

- Oryginał transmitancji $G(s)$, czyli odwrotna transformata Laplace'a Transmitancji

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad U(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s) \quad y(t) = g(t)$$

1.6 Podać trzy warunki jakie muszą zajść aby można było sterować w układzie otwartym

Wszystkie poniższe warunki muszą zostać spełnione:

- Obiekt jest stabilny
- Obiekt jest bardzo dobrze znany
- Zagwarantowane zostało, że w czasie sterowania nie pojawią się zakłucenia zewnętrzne, ani obiekt się nie zmienia

1.7 Podać kształt odpowiedzi na skok i deltę Diraca dla członu :

- Całkującego
- Inercyjnego
- Całkująco-inercyjnego
- różniczkująco-inercyjnego
- drugiego rzędu inercyjnego
- Drugiego rzędu oscylacyjnego

Rozwiązanie w sprawozdaniu nr 2.

1.8 Po co stosuje się kryterium Hurwitza ?

Stosuje się je, aby na podstawie transmitancji układu określić, czy jest on asymptotycznie stabilny.

1.9 Jaki wzór opisuje kształt wyjścia w stanie ustalonym $y(t)$ dla $t \rightarrow \infty$, systemu o transmitancji $G(s)$ na sterowanie sygnałem $u(t)$.

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

W stanie ustalonym na wyjściu zawsze pojawi się sygnał sinusoidalny, o takiej samej częstotliwości jak ten na wejściu, ale o przesuniętej fazie i innej amplitudzie.

1.10 Czego dotyczy stabilność w sensie Lapunowa, a czego stabilność w sensie BIBO

Stabilność w sensie Lapunowa bierze pod uwagę warunki początkowe. Układ jest stabilny w sensie Lapunowa, jeśli ka każdym warunków początkowych wyjście układu dąży do zera przy zerowym sterowaniu.

Stabilność w sensie BIBO Układ jest stabilny w sensie BIBO, jeśli na ograniczone sterowanie zawsze reaguje ograniczoną odpowiedzią.

1.11 Określić stabilność obiektu G_1 i G_2 w sensie Lapunowa i w sensie BIBO

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2} \tag{12}$$

$$G_2(s) = \frac{s-1}{s^2-s} = \frac{s-1}{(s-1)s} = \frac{1}{s} \tag{13}$$

$G_1(s)$ to układ całkujący II rzędu. Jest niestabilny w sensie Lapunowa, więc niestabilny w sensie BIBO

$G_2(s)$!!TODO!!

1.12 Napisać macierzowe równanie stanu układu liniowego

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (14)$$

$$\dim[A] = p \times p \quad , \quad \text{Macierz stanu} \quad (15)$$

$$\dim[B] = p \times n \quad , \quad \text{Macierz sterowania} \quad (16)$$

$$\dim[C] = m \times p \quad , \quad \text{Macierz obserwacji} \quad (17)$$

$$\dim[D] = m \times n \quad , \quad \text{Macierz wyjścia} \quad (18)$$

1.13 Napisać rozwiązanie równania stanu przyjmując $t_0 = 0$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (19)$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (20)$$

1.14 Warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej dla układu liniowego sdyskretnego

Warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności układu liniowego, stacjonarnego, dyskretnego jest, aby wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego macierzy A_d leżały wewnątrz koła jednostkowego, tzn. $|z_i| < 1$ dla $i = 1, \dots, n$.

System będzie stabilny, jeśli na okręgu jednostkowym, będą leżały tylko jednokrotne pierwiastki wielomianu minimalnego.

1.15 Podać kryterium sterowalności stanu dla układu liniowego

Sterowalność układ jest całkowicie sterowalny, jeżeli sterując ograniczonym przedziałami, ciągłym sterowaniem, można układ przeprowadzić w skończonym czasie z dowolnego stanu początkowego x_0 do dowolnego stanu końcowego x_k .

Kryterium sterowalności Układ opisany równaniem stanu

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (21)$$

jest całkowicie sterowalny, gdy w jego transmitancji lub transmitancji macierzowej nie ma skrótów (czyli zera licznika różne od zer mianownika).

Twierdzenie Warunkiem koniecznym i dostatecznym X-sterowalności układu liniowego, stacjonarnego jest, aby rząd macierzy Q_c był równy długości wektora stanu (n).

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (22)$$

1.16 Podać kryterium obserwowalności stanu dla układu liniowego

Obserwowalność Układ jest całkowicie obserwowalny, jeżeli na podstawie znajomości sterowania $u(t_o, t_k)$ i na podstawie znajomości $y(t_o, t_k)$, można wyznaczyć stan początkowy układu x (w chwili $t = t_o$).

Transmitancja operatorowa i transmitancja macierzowa opisują jedynie całkowicie obserwowalną i sterowalną część systemu.

Kryterium obserwowalności Układ opisany równaniem stanu oraz równaniem wyjścia

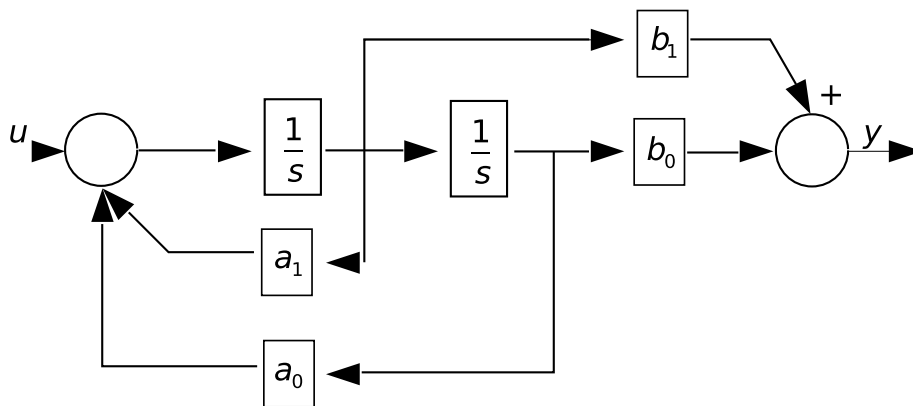
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (23)$$

jest całkowicie obserwowalny, gdy rząd macierzy G jest równy długości wektora stanu.

$$G = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

1.17 Narysować schemat połączeń dla realizacji transmitancji $G(s)$ wykorzystując człony całkujące

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$



1.18 Napisać wzór na funkcję sterowania u_k realizowanego przez dyskretny regulator PID tylko z wykorzystaniem wartości próbek u_{k-1} i próbek pomiarowych błędu ϵ_1 (ilu?)

Algorytm przyrostowy (prędkościowy) wykorzystuje policzoną w chwili poprzedniej wartość sterowania u_{k-1} i trzy ostatnie próbki pomiarowe błędu :

$$u_k = u_{k-1} + b_0\epsilon_k + b_1\epsilon_{k-1} + b_2\epsilon_{k-2} \quad (25)$$

1.19 Warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej układu liniowego ciągłego

Układ liniowy, stacjonarny $\dot{x} = Ax$ jest globalnie asymptotycznie stabilny wtedy, i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A mają ujemne części rzeczywiste.

1.20 Podać przykłady wskaźników jakości przebiegu regulacji stosowane dla strojenia regulatorów PID

Błąd regulacji rozłożony w czasie

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \epsilon_p^2(t) dt \quad (26)$$

Koszt energii sterowania

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt \quad (27)$$

Wielkość wydatku (zużycia) paliwa

$$J = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt \quad (28)$$

Kompromis jakości stabilizacji i kosztów sterowania

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [Qx(T) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (29)$$

Kompromis ustalany macierzami wagowymi Q (dodatnio półokreślona - może jej nie być) i R (dodatnio określona - musi być zawsze)

Czas ustalania

maksymalne przeregulowanie

2 Nierozwiązane tematy

2.1 Jakie są główne własności regulatora typu LQR odmiennie od regulatora PID

2.2 Po co stosuje się obserwatory stanu i jaka jest postać równania asymptotycznej estymacji stanu

3 Zadania z zerówki - grupa A

3.1 Dwa zbiorniczki równoległe z tym samym wejściem

(w notatkach Yuijim, rozdział 5.6 układ 2 tyle że z wejściem K_u).

1. napisać równanie dla każdego ze zbiorniczków zakładając powierzchnię $P=1$ (gęstość powieździał że można pominąć, albo też przyjąć 1) dla wejścia $Q(t)=K_u(t)$ (wyjścia były kolejno $\lambda_1 x_1$ oraz $\lambda_2 x_2$, wysokości x_1 i x_2)
2. narysować schemat blokowy wykorzystując człony całkujące
3. podać równanie stanu $x(t)$, wyjścia $y(t)$ oraz macierze A, B, C dla wyjścia $y(t)=x_1(t)-x_2(t)$

3.2 2. Co to jest transmitancja

(było podanych tak z 6 odpowiedzi, trzeba było wybrać dwie poprawne)

3.3 3. Kryterium obserwowalności układu liniowego.

3.4 4. Jakie własności ma regulator LQR inne niż regulator PID.

4 Zadania z zerówki - grupa B

4.1 Dwa zbiorniczki połączone szeregowo. Jakies tam dane.

(był rysunek)

1. równanie stanu dla każdego ($P=1$)
2. schemat blokowy dla członów całkujących
3. podać macierze A, B, C przy założeniu, że $y(t) = x_1(t)$

4.2 Czym jest odpowiedź impulsowa (chyba?)

a,b,c,d,e,f,g odpowiedzi - wybrać dwie

4.3 Kryterium sterowalności.

4.4 Kryterium jakości doboru parametrów dla regulatorów PID