# Tematyka egzaminu z Podstaw sterowania

Rafał Trójniak

7 września 2009

## Spis treści

# 1 Rozwiązane tematy

## 1.1 Napisać równanie różniczkowe dla zbiornika z odpływem grawitacyjnym

- $Q_1$ - prędkość odpływu wody przez szczelinę
- $h(t)$ - poziom cieczy w zbiorniku
- $R$ - Stała okreslająca prędkość odpływu wody przez otwór (Opór)
- $\rho$ - gęstość cieczy
- $P$ - Pole powieszchni tafli wody (const)

$$Q_1 = \frac{h(t)}{R} \tag{1}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{-1}{\rho P R} h(t) + \frac{1}{\rho P} Q(t) \quad P = const \tag{2}$$

$$\dot{h}(t) = \frac{-1}{\rho R} h(t) + \frac{1}{\rho} Q(t) \tag{3}$$

W stanie ustalonym :

$$\dot{h}(t) = \frac{-1}{\rho R} h(t) + \frac{1}{\rho} Q(t) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{\rho R} h(t) = \frac{1}{\rho} Q(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h(t)}{\rho R} = \frac{Q(t)}{\rho} = 0 \tag{5}$$

## 1.2 Definicja transformaty Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau \qquad s = \alpha + j\omega \tag{6}$$

Dla funkcji $f(t)$ przyporządkowuje ona funkcję $F(s)$ gdzie $s = \alpha + j\omega$. Aby transformata istniała musi istnieć dla danej funkcji $f(t)$ przynajmniej jedno $s$, dla których taka całka istnieje, tzd. jest mniejsza od $\infty$.

$$\int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau < \infty \tag{7}$$

## 1.3 Co to jest transmitancja

Jest to stosunek transformaty Laplace'a funkcji wyjścia systemu, do transformaty Laplace'a funkcji wejści systemu. Zakładamy zerowe wartości wejściowe.

## 1.4 Dla skalarnego liniowego równania różniczkowego n-tego rzędu napisać transmitancję

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{8}$$

$$Y(s)(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0) = U(s)b_0 u \tag{9}$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} U(s) \tag{10}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} \tag{11}$$

## 1.5 Co to jest impulsowa funkcja przejścia

- Jest to odpowiedź układu na deltę diraca
- Pochodna odpowiedzi układu $h(4)$ na skok jednostkowy

$$g(t) = \mathrm{d}h\frac{t}{dt}$$

- Oryginał transmitancji G(s), czyli odwrotna transformata Laplace'a Transmitancji

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad U(s) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = G(s) \quad y(t) = g(t)$$

## 1.6 Podać trzy warunki jakie muszą zajść aby można było sterować w układzie otwartym

Wszystkie poniższe warunki muszą zostać spełnione:

- Obiekt jest stabilny
- Obiekt jest bardzo dobrze znany
- Zagwarantowane zostało, że w czasie sterowania nie pojawią się zakłucenia zewnętrzne, ani obiekt się nie zmieni

### 1.7 Podać kształt odpowiedzi na skok i deltę Diraca dla członu :

- Całkującego
- Inercyjnego
- Całkująco-inercyjnego
- różniczkująco-inercyjnego
- drugiego rzędu inercyjnego
- Drugiego rzędu oscylacyjnego

Rozwiązanie w sprawozdaniu nr 2.

### 1.8 Po co stosuje się kryterium Hurwitza ?

Stosuje się je, aby na podstawie transmitancji układu określić, czy jest on asymptotycznie stabilny.

### 1.9 Jaki wzór opisuje kształt wyjścia w stanie ustalonym y(t) dla $t \to \infty$, systemu o transmitancji G(s) na sterowanie sygnałem $u(t)$.

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

W stanie ustalonym na wyjściu zawsze pojawi się sygnał sinusoidalny, o takiej samej częstotliwosci jak ten na wejściu, ale o przesuniętej fazie i innej amplitudzie.

### 1.10 Czego dotyczy stabilność w sensie Lapunowa, a czego stabilność w sensie BIBO

**Stabilność w sensie Lapunowa** bierze pod uwagę warunki początkowe. Układ jest stabilny w sensie Lapunowa, jeśli ka każdych warunków początkowych wyjście układu dąży do zera przy zerowym sterowaniu.

**Stabilność w sensie BIBO** Układ jest stabilny w sensie BIBO, jeśli na ograniczone sterowanie zawsze reaguje ograniczoną odpowiedzią.

### 1.11 Określić stabilność obiektu $G_1$ i $G_2$ w sensie Lapunowa i w sensie BIBO

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2} \tag{12}$$

$$G_2(s) = \frac{s-1}{s^2 - s} = \frac{s-1}{(s-1)s} = \frac{1}{s} \tag{13}$$

$G_1(s)$ to układ całkujący II rzędu. Jest niestabilny w sensie Lapunowa, więc niestabilny w śęsie BIBO

$G_2(s)$ !!TODO!!

## 1.12 Napisać macierzowe równanie stanu układu liniowego

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{14}$$

$$\dim[A] = p \times p \quad , \quad \text{Mzcierzstanu} \tag{15}$$

$$\dim[B] = p \times n \quad , \quad \text{Macierzsterowania} \tag{16}$$

$$\dim[C] = m \times p \quad , \quad \text{Mzcierzobserwacji} \tag{17}$$

$$\dim[D] = m \times n \quad , \quad \text{Mzcierzwyjścia} \tag{18}$$

## 1.13 Napisać rozwiązanie równania stanu przyjmując $t_0 = 0$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau + Du(t) \tag{20}$$

## 1.14 Warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej dla układu liniowego sdyskretnego

Warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności układu liniowego, stacjonarnego, dyskretnego jest, aby wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego macierzy $A_d$ leżały wewnątrz koła jednostkowego, tzn. $|z_i| < 1$ dla $i = 1, \ldots, n$.

System będzie stabilny, jeśli na okręgu jednostkowym, będą leżały tylko jednokrotne pierwiastki wielomianu minimalnego.

## 1.15 Podać kryterium sterowalności stanu dla układu liniowego

**Sterowalność** układ jest całkowicie sterowalny, jeżeli sterujac ograniczonym przedziałami, ciągłym sterowaniem, można układ przprowadzic w skończonym czasie z dowolnego stanu początkowego $x_o$ do dowolnego stanu końcowego $x_k$.

**Kryterium sterowalności** Układ opisany równaniem stanu

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{21}$$

jest całkowicie sterowalny, gdy w jego transmitancji lub transmitancji macierzowej nie ma skróceń (czyli zera licznika różne od zer mianownika).

**Twierdzenie** Warunkiem koniecznym i dostatecznym X-sterowalności układu liniowego, stacjonarnego jest, aby rząd macierzy $Q_c$ był równy długości wektora stanu ($n$).

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{22}$$

## 1.16 Podać kryterium obserwowalności stanu dla układu liniowego

**Obserwowalność** Układ jest całkowicie obserwowalny, jeżeli na podstawie znajomości sterowania $u(t_o, t_k)$ i na podstawie znajomości $y(t_o, t_k)$, można wyznaczyć stan początkowy układu $x$ (w chwili $t = t_o$).

Transmitancja operatorowa i transmitancja macierzowa opisuja jedynie całkowicie obserwowalną i sterowalną część systemu.

**Kryterium obserwowalności** Układ opisany równaniem stanu oraz równaniem wyjścia

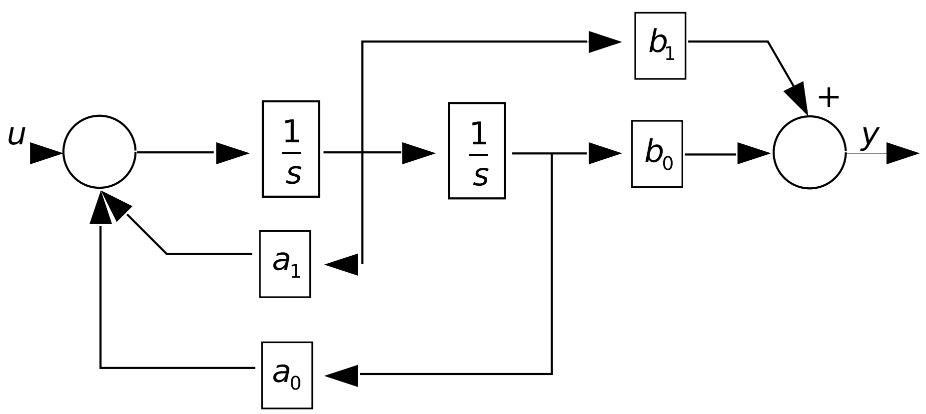
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{23}$$

jest całkowicie obserwowalny, gdy rząd macierzy G jest równy długości wektora stanu.

$$C = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

## 1.17 Narysować schemat połączeń dla realizacji transmitancji $G(s)$ wykorzystując człony całkujące

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$



## 1.18 Napisać wzór na funkcję sterowania $u_k$ realizowanego przez dyskretny regulator PID tylko z wykorzystaniem wartości próbek $u_{k-1}$ i próbek pomiarowych błędu $\epsilon_1$ (ilu?)

Algorytm przyrostowy (prędkościowy) wykorzystuje policzoną w chwili poprzedniej wartość sterowania $u_{k-1}$ i trzy ostatnie próbki pomiarowe błędu :

$$u_k = u_{k-1} + b_0\epsilon_k + b_1\epsilon_{k-1} + b_2\epsilon_{k-2} \tag{25}$$

## 1.19 Warunek konieczny i wystarczający stabilności asymptotycznej układu liniowego ciągłego

Układ liniowy, stacjonarny $\dot{x} = Ax$ jest globalnie asymptotycznie stabilny wtedy, i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy $A$ mają ujemne części rzeczywiste.

## 1.20 Podać przykłady wskaźników jakości przebiegu regulacji stosowane dla strojenia regulatorów PID

**Błąd regulacji rozłożony w czasie**

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \varepsilon_p^2(t)\mathrm{dt} \tag{26}$$

**Koszt energii sterowania**

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)\mathrm{dt} \tag{27}$$

**Wielkość wydatku (zużycia) paliwa**

$$J = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)|\mathrm{dt} \tag{28}$$

**Kompromis jakości stabilizacji i kosztów sterowania**

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left[Qx(T) + u^T(t)Ru(t)\right] \mathrm{dt} \tag{29}$$

Kompromis ustalany macierzami wagowymi Q (dodatnio półokreślona - może jej nie być) i R (dodatnio określona - musi być zawsze)

**Czas ustalania**

**Maksymalne przeregulowanie**

### 1.21 Po co stosuje się obserwatory stanu i jaka jest postać równania asymtotycznej estymacji stanu

**Obserwator stanu** Jest to algorytm, który dla systemu obserwowalnego względem stanu, na podstawie wyjścia $y(t)$ i macierzy $A \quad B \quad C$ pozwala obliczyć wektor stanu $x(t)$.

**Asymtotyczny obserwator (estymator ) stanu** Rozróżniamy obserwatory dokładne, które po zarejestrowaniu przebiegu $y(t)$ na przedziale $[0, T']$ odtwarzają stan dokładny $x(T')$. Można też budować obserwatory niedokładne, takie, które nie potrzebują pamięci i okna pomiarowego w przedziale $[0, T']$ . Wykorzystując na bieżąco pomiar $y(t)$ zwracają od razu $\bar{x}(t)$, gdzie $\bar{x}(t)$ jest tylko estymatą stanu, ale gwarantującą, że:

$$\lim_{t\to\infty}(x(t) - \bar{x}(t)) \to 0 \tag{30}$$

Kształt tych estymatorów ma postać równania różniczkowego:

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A - GC)\bar{x}(t) + Bu(t) + Gy(t), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \tag{31}$$

Aby można było zastosować estymator stanu, wpływ warunków początkowych na stan obiektu musi maleć z czasem, więc obiekt musi być stabilny asymptotycznie.

Szybkość zbieżności w obserwatorze nastawiamy w macierzy G (do dyspozycji projektanta). Estymatory asymptotyczne znane są pod nazwą obserwatora Luenbergera lub Kalmana-Bucy.

# 2 Nierozwiązane tematy

### 2.1 Jakie są główne własności regulatora typu LQR odmienne od regulatora PID

# 3 Zadania z zerówki - grupa A

### 3.1 Dwa zbiorniczki równolegle z tym samym wejściem

(w notatkach Yuijim, rozdział 5.6 układ 2 tyle że z wejściem Ku).

1. napisać równanie dla każdego ze zbiorniczków zakładając powierzchnię P=1 (gęstość powiedział że można pominąć, albo też przyjąć 1) dla wejścia Q(t)=Ku(t) (wyjścia były kolejno lambda1*x1 oraz lambda2*x2, wysokości x1 i x2)
2. narysować schemat blokowy wykorzystując człony całkujące
3. podać równanie stanu x(t), wyjścia y(t) oraz macierze A,B,C dla wyjścia y(t)=x1(t)-x2(t)

### 3.2 2. Co to jest transmitancja

(było podanych tak z 6 odpowiedzi, trzeba było wybrać dwie poprawne)

### 3.3 3. Kryterium obserwowalności układu liniowego.

### 3.4 4. Jakie własności ma regulator LQR inne niż regulator PID.

## 4 Zadania z zerówki - grupa B

### 4.1 Dwa zbiorniczki połączone szeregowo. Jakieś tam dane.

( był rysunek )

1. równanie stanu dla każdego (P=1)
2. schemat blokowy dla członów całkujących
3. podać macierze A,B,C przy założeniu, że y(t) = x1(t)

### 4.2 Czym jest odpowiedź impulsowa (chyba?)

a,b,c,d,e,f,g odpowiedzi - wybrać dwie

### 4.3 Kryterium sterowalności.

### 4.4 Kryterium jakości doboru parametrów dla regulatorów PID